Παρασκευή 22/05/20

Έλεγχοι στατιστικών Υποθέσεων - Στατιστικά Τεστ.

Στατιστικές υποθέσεις:
Ερωτήματα, εικασίες, απόψεις, υποθέσεις τις οποίες διατυπώνει το ίδιο το στατιστικό πρόβλημα πού επιθυμούμε να διερευνήσουμε.

• Ho μηδενική υπόθεση: εκείνη που δεν πιστεύουμε οτι αληθεύει, αυτή που πρέπει να απορριφθεί

• Ha εναλλακτική υπόθεση: ανταγωνιστική της Ho. διατυπώνει εκείνο που φαίνεται οτι αληθεύει.

Απλή στατιστική υπόθεση:
Στατιστική υπόθεση που καθορίζει πλήρως την κατανομή του πληθυσμού ως προς την παράμετρο ή τις παραμέτρους που μας ενδιαφέρουν.
Διαφορετικά θα λέγεται σύνθετη.

Scanned with CamScanner

Στατιστικό Τέστ:

Η διαδικασία η οποία διατυπώνεται προκειμένου να αποφανθούμε υπέρ της αλήθειας μιας εκ των δυο υποθέσεων, της H_0 ή της H_a

Για να κατασκευαστεί ένα στατιστικό τέστ, στηριζόμαστε στο τυχαίο δείγμα.

① Στατιστικές υποθέσεις:

$H_0 = \theta = \theta_0$ (θ_0: γνωστό) έναντι $H_a: \theta \neq \theta_0$ ($>$, $<$)

ή

$H_0: \theta \in \Theta_0$ και $H_a: \theta \in \Theta_a$; $\Theta_0, \Theta_a \subseteq \Theta$

② Στατιστική συνάρτηση του τέστ: που προέρχεται από $f(x,\theta)$

Είναι κάθε συνάρτηση του τ.δ $X_1, \ldots, X_n$ η οποία μπορεί να περιέχει και γνωστές παραμέτρους. (παράμετρος θ)

$T = T(\underline{X}) = T(X_1, \ldots X_n)$

Βασίζεται στο επαρκές στατιστικό ή στον εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας.

③ Κρίσιμη Περιοχή:

Ένα υποσύνολο του συνόλου τιμών της στατιστικής συνάρτησης $T = T(\underline{X})$ το οποίο χρησιμοποιείται για τη λήψη απόφασης υπέρ της μηδενικής υπόθεσης H_0 ή της εναλλακτικής H_a.

$$C = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : T(\underline{x}) \in A \subseteq \mathbb{R}\} = \{\underline{x} : T(\underline{x}) \geq \underbrace{k}_{\text{κρ. σημείο}}\}$$

Το σύνολο A διαμορφώνεται από την μορφή των υποθέσεων H_0 και H_a.

④ Κανόνας Λήψης Απόφασης:

Κανόνας με τον οποίον θα αποφασιστεί η αποδοχή ή η απορριψη της μηδενικής υπόθεσης H_0.
Αν η τιμή της στατιστικής συνάρτησης του τεστ $T = T(X)$ στην παρατηρηθείσα τιμή $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ του δείγματος $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ περιλαμβάνεται στην κρ. περιοχή C, τότε απορρίπτομε την H_0.
Διαφορετικά δεν υπάρχουν επαρκή στοιχεία για να την απορρίψω.

Σχηματικά:

Αν $T = T(X) \in C$ τότε απορρίπτεται η H_0

Αν $T = T(X) \notin C$ τότε η H_0 δεν μπορεί να απορριφθεί

Σφάλματα - Τύπου I και II:

Σφάλμα τύπου I:
Απορριψη της H_0 δεδομένου ότι H_0 είναι αληθής

Σφάλμα τύπου II:
Αποδοχή της H_0 δεδομένου ότι H_a αληθής

		Στατιστικός	
		Αποδοχή H_0	Απορ. H_0
Φυση:	Αληθεύει H_0	—	Σφάλμα τύπου I
	Αληθεύει H_a	σφάλμα II	—

$\alpha = P$(Σφάλμα τύπου I) $= P$(Απορ. της H_0 | H_0 αληθής)

$\beta = P$(Σφάλμα τύπου II) $= P$(Αποδοχή H_0 | H_a αληθής)

Όσο πιο μικρά τα α, β τόσο πιο σίγουροι είμαστε για την απορ ή την αποδοχή της H_0 (ακλόνητη απόφαση)
Η πιθανότητα σφάλματος I, α, καθορίζεται από τον στατιστικό ($\alpha = 1\%, 5\%, 10\%$) και ονομάζεται επίπεδο σημαντικότητας
Η πιθανότητα σφάλματος τύπου II, β, ελαχιστοποιείται όταν η ισχύς του τεστ μεγιστοποιείται.

Ισχύς του τεστ. (γ)

$\gamma = 1 - \beta = 1 - P$(σφάλμα τύπου II) $=$
$= 1 - P$(αποδοχή της H_0 | H_a αληθής) $=$
$= P$(απορ της H_0 | H_a αληθής)

Παρατηρήσεις:

- Η εύρεση της κρ. περιοχής είναι εφικτή μόνο αν γνωρίζουμε την κατανομή της σ.σ. T υπό την μηδενική υπόθεση H_0

- Το τεστ που παράγεται για συγκεκριμένο επίπεδο σημαντικότητας α, δεν ξέρουμε αν είναι το καλύτερο για τον έλεγχο των συγκεκριμένων υποθέσεων.

- Η p-τιμή ενός στατιστικού τεστ είναι η μικρότερη τιμή του επιπέδου σημαντικότητας α για την οποία απορ. η H_0. Η λήψη απόφασης με χρήση της p-τιμής ακολουθεί τον κανόνα:

Αν η p-τιμή $< \alpha$ τότε απορ. η μηδενική υπόθεση H_0
Αν η p-τιμή $\geq \alpha$ τότε δεν μπορεί να απορ. η H_0

Ισχυρότατο Τεστ:

Έστω ο έλεγχος μιας απλής ή σύνθετης μηδενικής υποθ. έναντι μιας απλής εναλλακτικής H_a.
Ισχυρότατο τεστ επιπέδου σημαντικότητας α για τον έλεγχο αυτό ονομάζεται το τεστ με τη μέγιστη ισχύ γ. μεταξύ όλων των άλλων τεστ ίδιου επιπέδου σημαντικότητας

Ομοιόμορφα Ισχυρότατο Τεστ:

Έστω ο έλεγχος μιας απλής ή σύνθετης μηδενικής υπόθεσης έναντι μιας σύνθετης εναλλακτικής H_a.
Θεωρούμε ένα τεστ για τον έλεγχο αυτό και έστω $\gamma(\theta)$ η ισχύς του ως συνάρτηση της παραμέτρου θ όπως αυτή καθορίζεται από την H_a. Το τεστ αυτό θα ονομάζεται ομοιόμορφα ισχυρότατο τεστ αν η ισχύς του $\gamma(\theta)$ είναι για καθε θ μεγαλύτερη ή ιση απο την ισχύει οποιουδήποτε άλλου τεστ του ίδιου επιπέδου για τον έλεγχο των ίδιων υποθέσεων

Θεμελιώδες Λήμμα Neyman-Pearson

Έστω τ.δ $X_1, X_2, \dots, X_n$ απο πληθυσμό με γενική κατανομή $f(x, \theta)$ με $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$. Έστω ένα πρόβλημα ελέγχου μιας απλής $H_0: \theta = \theta_0$ έναντι μιας απλής $H_a: \theta = \theta_a$, $\theta_0, \theta_a \in \Theta$
Αν υπάρχει μια κρ. περιοχη C μεγέθους a και ένας σταθερός αριθμός $k \geq 0$ τ.ω

$$\frac{L_0}{L_a} = \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta_0)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta_a)} \leq k \quad \forall x \in C$$

και $$\frac{L_0}{L_a} = \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta_0)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta_a)} > k \quad \forall x \in S - C$$

Τότε η κ.π C είναι η πλέον ισχυρή κ.π μεγέθους α για τον έλεγχο της $H_0: \theta=\theta_0$ έναντι της $H_a: \theta=\theta_a$

(i) Ξεκινάμε από $\frac{L_0}{L_a} \le k$ και θέλουμε να καταλήξουμε σε ανίσωση $T(\underline{X}) \le k^*$ ή $T(\underline{X}) \ge k^*$ όπου στο πρώτο μέλος θα εμφανίζεται η σ.σ.τ.

(ii) Επιθυμητό είναι η σ.σ.τ. να έχει γνωστή κατανομή κάτω από την H_0, όταν η H_0 αληθής, η οποία θα αξιοποιηθεί για τον προσδιορισμό του κρίσιμου σημείου k^*

(iii) Το κ.σ k^* προσδιορίζεται από την αξιοποίηση της πιθανότητας σφάλματος τύπου I για αυτό απαιτείται η γνώση ~~του~~ ~~......~~ της κατανομής της σ.σ.τ.

Δ Μικρές τιμές του L_0/L_a σημαίνει ότι $L_0 < L_a$ άρα προϊδεαζόμαστε ότι πρέπει να απορριφθεί η H_0

Παράδειγμα: Έλεγχος για τη μέση τιμή Κανονικού πληθ. Z- τεστ.

Έστω τ.δ $X_1, \dots X_n$ από πληθυσμό με κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ με σ^2 γνωστή. Να κατασκευαστεί το Ι- τεστ επιπέδου σημαντικότητας α για τον έλεγχο της $H_0: \mu=\mu_0$ (μ_0 γνωστό) έναντι της $H_a: \mu=\mu_a$ (μ_a γνωστό) $\mu_a > \mu_0$

Για την εφαρμογή του Λήμματος των Neyman-Pearson απαιτείται η συνάρτηση πιθανοφάνειας η οποία είναι,

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2} = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2}$$

έτσι $L_0 = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}$

$$L_a = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_a)^2}$$

Άρα η Ι-κρ. περιοχή (κ.π) θα είναι $\frac{L_0}{L_a} \leq k$.
με k μια σταθερά.
Προσπαθούμε τώρα δουλεύοντας την ανισότητα αυτή να φτάσουμε σε μια στατιστική συνάρτηση και επιθυμητό είναι να γνωρίζουμε ή να μπορούμε να βρούμε την κατανομή της υπό την H_0
Στο πλαίσιο αυτό

$$\frac{L_0}{L_a} \leq k \Rightarrow \frac{\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}}{\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_a)^2}} \leq k$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2-\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_a)^2\right\}} \leq k$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2-\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_a)^2\right\} \leq \log k.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2\mu_0X_i+\mu_0^2)-\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2\mu_aX_i+\mu_a^2) \geq -2\sigma^2\log k.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\mu_0\sum_{i=1}^{n}X_i+n\mu_0^2-\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\mu_a\sum_{i=1}^{n}X_i+n\mu_a^2 \geq -2\sigma^2\log k$$

$$\Rightarrow 2(\mu_a-\mu_0)\sum_{i=1}^{n}X_i \geq -2\sigma^2\log k+n(\mu_a^2-\mu_0^2)$$

Μασμα $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \geq \dfrac{-2\sigma^2 \log k + n(\mu a^2 - \mu o^2)}{2(\mu a - \mu o)}$

$\Rightarrow \bar{X} \geq \dfrac{-2\sigma^2 \log k + n(\mu a^2 - \mu o^2)}{2n(\mu a - \mu o)} = k'$

Επομένως $C_1 = \{ \underline{x} = (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \geq k' \}$

Πως μπορεί να υπολογιστεί το κρίσιμο σημείο k?
Η τεχνική για αυτό είναι standard και αξιοποιεί την πιθανότητα σφάλματος I.

Για τον υπολογισμό του κ.σ k':

$a = P(\text{Απορ } H_0 \mid H_a \text{ αληθής}) = P(\underline{x} \in C_1 \mid \mu = \mu o) =$

$= P(\bar{X} \geq k' \mid x_1, \ldots, x_n \sim N(\mu o, \sigma^2))$

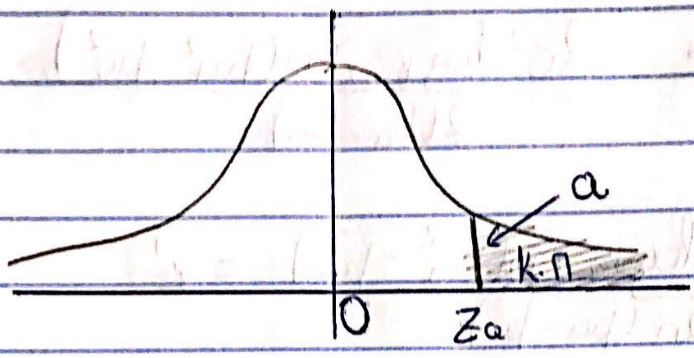
$a = P(\bar{X} \geq k \mid \bar{X} \sim N(\mu o, \sigma^2/n)) =$

$= P\left(\dfrac{\bar{x} - \mu o}{\sigma / \sqrt{n}} \geq \dfrac{k' - \mu o}{\sigma / \sqrt{n}} \;\middle|\; \dfrac{\bar{x} - \mu o}{\sigma / \sqrt{n}} = Z \sim N(0,1) \right)$

$= P\left(Z \geq \dfrac{k' - \mu o}{\sigma / \sqrt{n}} \;\middle|\; Z \sim N(0,1) \right)$

$Z_a : P(Z \geq Z_a) = a, \; Z \sim N(0,1)$

Άρα $\dfrac{k' - \mu o}{\sigma / \sqrt{n}} = Z_a \Rightarrow k' = Z_a \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} + \mu o$



Υπολογισμός Ισχύος του Z - τεστ

$$\gamma = 1-\beta = 1 - P(\text{αποδοχ } H_0 \mid H_a \text{ αληθ}) =$$

$$= P(\text{απορ. } H_0 \mid H_a \text{ αληθής})$$

$$= P\left(\bar{X} \geq \mu_0 + z_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\middle|\; X_1, \dots, X_n \sim N(\mu_a, \sigma^2)\right)$$

$$= P\left(\bar{X} \geq \mu_0 + z_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\middle|\; \bar{X} \sim N\left(\mu_a, \frac{\sigma^2}{n}\right)\right)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-\mu_a}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{\mu_0 - \mu_a + z_a \sigma/\sqrt{n}}{\sigma/\sqrt{n}} \;\middle|\; \frac{\bar{X}-\mu_a}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)\right)$$

$$= P\left(Z \geq z_a + \frac{\mu_0 - \mu_a}{\sigma/\sqrt{n}}\right), \quad Z \sim N(0,1)$$

$$= 1 - P\left(Z \leq z_a + \frac{\mu_0 - \mu_a}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(z_a + \frac{\mu_0 - \mu_a}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

με Φ την α.σ.κ της $N(0,1)$ κατανομής